SECTION A — Amphis 1–4–5

Corrigé du Partiel du 13 novembre 2010

Exercice 1 Le discriminant de l'équation : $z^2-(1-i)z-2+i=0$ est $\Delta=(1-i)^2-4(i-2)=8-6i$.

Calculons les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de Δ. Observons que le module de Δ vaut $|\Delta|=10$. Le nombre complexe $(a+ib)$, avec $a,b\in\mathbb{R}$, est une racine carrée de Δ si, et seulement si, le couple (a,b) est solution du système :

$$\begin{cases} a^2-b^2=8 \\ 2ab=-6 \\ a^2+b^2=|\Delta|=10 \end{cases}$$

de sorte que a,b sont de signes opposés et vérifient $a^2=9$, $b^2=1$. En conclusion les racines carrées de Δ sont :

$$3-i \text{ et } -3+i.$$

Par conséquent les racines de l'équation $z^2-(1-i)z-2+i=0$ sont :

$$\frac{(1-i)+(3-i)}{2}=2-i \text{ et } \frac{(1-i)-(3-i)}{2}=-1.$$

Exercice 2

1. Soit $a\in A$ quelconque, on a $\varphi(a)\in\varphi(A)$, de sorte que $a\in\varphi^{-1}\big(\varphi(A)\big)$.
2. (a) On a :

$$f^{-1}\big(\{0\}\big)=\{x\in\mathbb{R}\mid\cos(x)=0\}=\{-\pi/2,\ \pi/2\}.$$

$$f^{-1}\big(\,]0,+\infty[\,\big)=\{x\in\mathbb{R}\mid\cos(x)>0\}=]-\pi/2,\ \pi/2[.$$

$$f^{-1}\big([-1,0]\big)=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<\cos(x)<0\}=[-\pi,\ -\pi/2]\cup[\pi/2,\pi].$$

$$f\big([\pi/6,\ \pi/3]\big)=\{\cos(x)\mid\pi/6\leqslant x\leqslant\pi/3\}=[\cos(\pi/3),\cos(\pi/6)]=\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

$$f\big([\pi/2,\ \pi]\big)=\{\cos(x)\mid\pi/2\leqslant x\leqslant\pi\}=[-1,0].$$

   (b) Observons que $A=\{\pi/2\}\subset[-\pi,\pi]$ est telle que A est finie incluse strictement dans $[-\pi,\pi]$. De plus $f^{-1}\big(f(A)\big)=f^{-1}\big(\{0\}\big)=\{-\pi/2,\ \pi/2\}$ contient strictement $A=\{\pi/2\}$.

Exercice 3

1. Les racines de l'équation $z^5=1$, où $z\in\mathbb{C}$, sont les racines cinquième de l'unité ; il s'agit des 5 nombres complexes :

$$1, e^{i\frac{2}{5}\pi}, e^{i\frac{4}{5}\pi}, e^{i\frac{6}{5}\pi}=e^{-i\frac{4}{5}\pi}, e^{i\frac{8}{5}\pi}=e^{-i\frac{2}{5}\pi}.$$

2. On a immédiatement :

$$X^5-1=(X-1)(1+X+X^2+X^3+X^4).$$

3. Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, on :

$$z^5-1=\prod_{k=0}^{4}(z-e^{i\frac{2k}{5}\pi})$$

en tenant compte des relations de conjugaison, il vient

$$z^5 - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{2}(z - e^{i\frac{2k}{5}\pi})(z - e^{-i\frac{2k}{5}\pi})$$

de sorte qu'en développant l'expression sous le signe produit,

$$z^5 - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{2}(z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot z + 1),$$

en conclusion et puisque de plus $z^5 - 1 = (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$, on a

$$(\star) \qquad 1+z+z^2+z^3+z^4 = \left(z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}\cdot z + 1\right).$$

4. En posant $a = \cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $b = \cos\dfrac{4\pi}{5}$, l'identité $(\star)$ donne en développant l'expression du membre de droite :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad 1+z+z^2+z^3+z^4 = 1 - 2(a+b)z + 2(2ab+1)z^2 - 2(a+b)z^3 + z^4,$$

en identifiant les cœfficients de même degré, on obtient :

$$\begin{cases} a+b & = -\frac{1}{2} \\ 2ab & = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

autrement dit le couple (a,b) est le couple des racines du trinôme :

$$P(X) = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4},$$

dont les deux racines sont :

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

5. Il s'en suit que, puisque $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$, $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 4

1. Observons que F est exactement l'ensemble des solutions du système homogène à 2 équations et 4 inconnues :

$$\begin{cases} x+3y-2z+4t & = 0 \\ 2x+5y+4z-t & = 0 \end{cases}$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2. Il vient facilement que $(x,y,z,t) \in F$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} x & = -22z + 23t \\ y & = 8z - 9t \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$F = \{(-22z - 31t, 8z - 9t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$$

d'où

$$F = \{z\cdot(-22, 8, 1, 0) + t\cdot(23, -9, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$$

ou encore en posant $u = (-22, 8, 1, 0)$ et $v = (23, -9, 0, 1)$

$$F = \mathrm{Vect}(u, v).$$

Observons finalement que u et v forment une famille libre (ce qui est facile). En conclusion (u,v) est une base de F.

Exercice 5

1. Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre. Soient a_1, a_2, a_3 des scalaires tels que :

$$a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + a_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

   Cette identité est équivalente au système homogène :

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + 2a_3 & = 0 \\ -2a_1 - 7a_2 - a_3 & = 0 \\ a_1 + 4a_2 & = 0 \\ -3a_1 - 5a_2 - 9a_3 & = 0 \end{cases}$$

   ce qui implique :

$$\begin{cases} a_1 + 4a_2 & = 0 \\ -a_2 + 2a_3 & = 0 \\ -a_2 + 3a_3 & = 0 \end{cases}$$

   de sorte que l'unique solution est $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Le système est donc bien libre.
2. $\mathbb{R}^4$ étant un espace vectoriel de dimension 4, une famille génératrice possède au moins 4 éléments. La famille libre $u_1 = (1, -2, 1, -3)$, $u_2 = (3, -7, 4, -5)$ et $u_3 = (2, -1, 0, -9)$ ne peut pas être génératrice.

Exercice 6

1. Assertion 1 : *On a*

$$(\circ) \quad \forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

   Démonstration. — La clef de ce problème repose sur la formule trigonométrique suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta).$$

   Grâce à cette formule, on établie par récurrence l'assertion $(\circ)$ sans difficulté. □
2. Assertion 2 : *Pour tout* $n \geqslant 1$, $T_n(X)$ *est de degré* n *et de coefficient dominant* 2^{n-1}.
   Démonstration. — On procède par récurrence. □
3. Assertion 3 : *L'ensemble des racines de* $T_n(X)$ *est*

$$\mathcal{Z}(T_n) = \left\{ \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$$

   Démonstration. — Grâce à l'Assertion 1, il est facile de voir que

$$\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \in \mathcal{Z}(T_n) \text{ pour tout } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

   De plus, les n réels $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, pour k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont deux à deux distincts, car les nombres $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont tous dans $[0, \pi]$ et la fonction cos est strictement décroissante sur cet intervalle. □
4. *Conclusion* : Le polynôme $T_n(X)$ est de degré n et ses n racines sont données dans l'Assertion 3. Ainsi (puisque son coefficient dominant est 2^{n-1})

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \right).$$